над процессом обучения своих студентов. Модуль позволяет назначать персональные задания, задания по вариантам или задания для отдельных групп студентов.

Ю. Ю. Багдерина

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,

yulya@mail.rb.ru

РАЗДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМАХ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Класс обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка с кубической нелинейностью по первым производным

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= K_1 + 2L_1x_1' + 2M_1x_2' + P_1x_1'^2 + 2S_1x_1'x_2' + Q_1x_2'^2 + \\
&\quad + x_1'(V_1x_1'^2 + 2V_0x_1'x_2' + V_2x_2'^2), \\
x_2'' &= K_2 + 2L_2x_2' + 2M_2x_1' + P_2x_2'^2 + 2S_2x_1'x_2' + Q_2x_1'^2 + \\
&\quad + x_2'(V_1x_1'^2 + 2V_0x_1'x_2' + V_2x_2'^2)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

с коэффициентами K_j, L_j, M_j, P_j, Q_j, S_j, V_0, V_j, $j = 1, 2$, зависящими от t, $x = (x_1, x_2)$, замкнут относительно произвольной невырожденной замены переменных

$$
\bar{t} = \theta(t, x), \qquad \bar{x}_1 = \varphi_1(t, x), \qquad \bar{x}_2 = \varphi_2(t, x). \tag{2}
$$

Задача интегрирования системы (1) сводится к более простой, если в результате преобразования (2) получена система

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1'' &= p_1(\bar{t}, \bar{x}_1) + 2q_1(\bar{t}, \bar{x}_1)\bar{x}_1' + r_1(\bar{t}, \bar{x}_1)\bar{x}_1'^2, \\
\bar{x}_2'' &= p_2(\bar{t}, \bar{x}_2) + 2q_2(\bar{t}, \bar{x}_2)\bar{x}_2' + r_2(\bar{t}, \bar{x}_2)\bar{x}_2'^2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

с разделяющимися уравнениями, которые могут быть решены независимо друг от друга. В частном случае замены переменных, не меняющей t (т. е. $\bar{t} = t$, $\bar{x}_i = \varphi_i(t,x)$), проблема разделения уравнений в системах ОДУ второго порядка решена в [1]. Критерий приводимости системы к виду $\bar{x}_i'' = 0$ получен в [2]. В данной работе случаи преобразования (2) с $\theta_x \neq 0$ и

$$\bar{t} = \theta(t), \qquad \bar{x}_1 = \varphi_1(t,x), \qquad \bar{x}_2 = \varphi_2(t,x) \tag{4}$$

рассматриваются отдельно. В полученных критериях используются следующие относительные инварианты первого порядка системы (1):

$$\begin{aligned}
a_{j0} &= V_{0,x_j} - V_{j,x_k} - S_jV_j + (P_j - S_k)V_0 + Q_kV_k,\\
a_{j1} &= V_{k,t} + Q_{j,x_j} - S_{j,x_k} + Q_j(S_k - P_j)+\\
&\quad +S_j(S_j - P_k) + (L_1 + L_2)V_k,\\
a_{j2} &= V_{0,t} + S_{j,x_j} - P_{j,x_k} + Q_1Q_2 - S_1S_2-\\
&\quad -2M_jV_j + (3L_j - L_k)V_0 + 2M_kV_k,\\
a_{j3} &= Q_{j,t} - M_{j,x_k} + M_j(S_j - P_k) + (L_k - L_j)Q_j + K_jV_k,\\
a_{j4} &= S_{j,t} - M_{j,x_j} + M_j(P_j - S_k) + (L_k - L_j)S_j + K_jV_0,\\
a_{j5} &= S_{j,t} - L_{j,x_k} - M_jS_k + M_kQ_j + \tfrac{3}{2}K_jV_0 + \tfrac{1}{2}K_kV_k,\\
a_{j6} &= P_{k,t} - L_{k,x_k} + M_jS_k - M_kQ_j + \tfrac{1}{2}K_jV_0 + \tfrac{3}{2}K_kV_k,\\
a_{j7} &= M_{j,t} - K_{j,x_k} - (L_1 + L_2)M_j + K_jS_j + K_kQ_j, \quad j = 1,2,\\
a_{j8} &= L_{j,t} - K_{j,x_j} - L_j^2 - M_1M_2 + K_jP_j + K_kS_j, \quad k = 3 - j.
\end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1. *Система двух ОДУ второго порядка* (1) *преобразованием* (4) *приводится к виду* (3) *тогда и только тогда, когда система* (1) *квадратична по первым производным, т. е.* $V_i = 0$, $i = 1,2,3$, *и выполнены условия*

$$
\begin{aligned}
&a_{j1} = 0, \qquad a_{j2} = 0, \qquad a_{j5} - a_{j4} = 0,\\
&a_{j5,x_j} - a_{k6,x_k} + Q_1 a_{23} + Q_2 a_{13} - S_j a_{k5} - S_k a_{j4} = 0,\\
&a_{j7,x_j} - a_{j8,x_k} + Q_j a_{k7} + S_j(a_{j8} - a_{k8}) - P_j a_{j7} -\\
&\qquad\qquad -M_j a_{k6} + L_j a_{j4} - L_k a_{j5} + M_k a_{j3} = 0,\\
&a_{j3,x_j} - a_{j4,x_k} + Q_j(a_{k5} - a_{k6}) + (2S_j - P_k)a_{j4} -\\
&\qquad\qquad -S_j a_{j6} + (S_k - P_j)a_{j3} = 0,\\
&c_{j2} - c_{j1} = 0,\\
&c_{j4} - 2M_k c_{j6} + 2(L_k - L_j)c_{j7} + 2M_j c_{j8} = 0, \quad j = 1,2,\\
&c_{j5} + 2M_j c_{k7} + 2(L_k - L_j)c_{k8} - 2M_k c_{j9} = 0, \quad k = 3 - j,
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{rank} A = 1.$$

Если для какого-либо $l = 1, \ldots, 20$ *строка* (A_{l1}, A_{l2}, A_{l3}) *отлична от нулевой, то* $A_{l2}^2 - 4A_{l1}A_{l3} \neq 0$.

Элементы 20×3-матрицы A равны

$$
\begin{aligned}
&A_{11} = a_{15}, \qquad A_{12} = a_{24} - a_{26}, \qquad A_{13} = -a_{23},\\
&A_{21} = a_{13}, \qquad A_{22} = a_{16} - a_{14}, \qquad A_{23} = -a_{25},\\
&A_{31} = a_{17}, \qquad A_{32} = a_{28} - a_{18}, \qquad A_{33} = -a_{27},\\
&A_{41} = c_{11}, \qquad A_{42} = c_{22} - c_{23}, \qquad A_{43} = -c_{20},\\
&A_{51} = c_{10}, \qquad A_{52} = c_{13} - c_{12}, \qquad A_{53} = -c_{21},\\
&A_{i+5,1} = (A_{i1})_t - 2L_1 A_{i1} - M_1 A_{i2},\\
&A_{i+5,2} = (A_{i2})_t - 2M_2 A_{i1} - (L_1 + L_2)A_{i2} - 2M_1 A_{i3},\\
&A_{i+5,3} = (A_{i3})_t - M_2 A_{i2} - 2L_2 A_{i3},\\
&A_{i+10,1} = (A_{i1})_{x_1} - 2P_1 A_{i1} - S_1 A_{i2},\\
&A_{i+10,2} = (A_{i2})_{x_1} - 2Q_2 A_{i1} - (P_1 + S_2)A_{i2} - 2S_1 A_{i3},\\
&A_{i+10,3} = (A_{i3})_{x_1} - Q_2 A_{i2} - 2S_2 A_{i3},
\end{aligned}
$$

$$A_{i+15,1} = (A_{i1})_{x_2} - 2S_1 A_{i1} - Q_1 A_{i2},$$
$$A_{i+15,2} = (A_{i2})_{x_2} - 2S_2 A_{i1} - (S_1 + P_2) A_{i2} - 2Q_1 A_{i3},$$
$$A_{i+15,3} = (A_{i3})_{x_2} - S_2 A_{i2} - 2P_2 A_{i3},$$

где $i = 1, \ldots, 5$ и используются обозначения

$$c_{j0} = a_{j3,t} - 3a_{j7,x_k} + 3Q_j(a_{k8} - a_{j8}) + 3(S_j - P_k)a_{j7} - \\ -M_j(a_{j4} + a_{j6}) - (L_1 + L_2)a_{j3},$$
$$c_{j1} = a_{j4,t} - 3a_{j7,x_j} + 3S_j(a_{k8} - a_{j8}) + 3(P_j - S_k)a_{j7} + \\ +M_j(a_{k6} - a_{k5}) + (L_k - 3L_j)a_{j4} - 2M_k a_{j3},$$
$$c_{j2} = a_{j5,t} - 3a_{j8,x_k} + 3Q_j a_{k7} - 3S_k a_{j7} - M_j(a_{k4} + 2a_{k6}) - \\ -2L_k a_{j5} + M_k a_{j3},$$
$$c_{j3} = a_{j6,t} - 3a_{k8,x_k} - 3Q_j a_{k7} + 3S_k a_{j7} - M_j a_{k5} - \\ -2L_k a_{j6} - M_k a_{j3},$$
$$c_{j4} = c_{j0,x_j} - c_{j2,x_k} + Q_j(c_{k1} - c_{k3}) + (2S_j - P_k)c_{j2} + \\ +(S_k - P_j)c_{j0} - S_j c_{j3},$$
$$c_{j5} = c_{j3,x_j} - c_{k1,x_k} - Q_j c_{k0} - Q_k c_{j0} + S_j c_{k1} + S_k c_{j2},$$
$$c_{j6} = a_{j3,x_k} + Q_j(2a_{j4} - a_{j6}) + (2P_k - S_j)a_{j3},$$
$$c_{j7} = a_{j4,x_k} + Q_j(a_{k6} - a_{k5}) + P_k a_{j4} + S_k a_{j3},$$
$$c_{j8} = a_{j5,x_j} + S_j(a_{k6} - a_{k4}) + S_k a_{j5} + Q_k a_{j3},$$
$$c_{j9} = a_{j6,x_k} + 2Q_j a_{k5} + P_k a_{j6} - S_k a_{j3}, \quad j = 1, 2, \quad k = 3 - j.$$

Теорема 2. *Система двух ОДУ второго порядка* (1) *преобразованием* (2) *с* $\theta_{x_1} \neq 0$ *приводится к виду* (3) *тогда и только тогда, когда совместна система алгебраических и дифференциальных уравнений относительно* $T(t,x)$, $Y(t,x)$, *которые имеют вид*

$$\Phi_{1T} = 0, \qquad \Phi_{1Y} = 0, \qquad \Phi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, 6,$$
$$\Phi_{2T} = 0, \qquad TT_{x_1} - T_t + \lambda_0 = 0, \qquad YT_{x_1} - T_{x_2} + \lambda_1 = 0,$$
$$\Phi_{2Y} = 0, \qquad TY_{x_1} - Y_t + \lambda_1 = 0, \qquad YY_{x_1} - Y_{x_2} + \lambda_2 = 0,$$

а также возникают из условий

$$\operatorname{rank} A = 1.$$

Если для какого-либо $l = 1, \dots, 9$ *строка* (A_{l1}, A_{l2}, A_{l3}) *отлична от нулевой, то* $A_{l2}^2 - 4A_{l1}A_{l3} \neq 0$.

Элементы 9×3-матрицы A равны

$$A_{11} = a_{23}, \qquad A_{12} = a_{21}, \qquad A_{13} = -a_{10},$$

$$A_{21} = a_{24} + a_{25} - a_{26} + a_{21}T - 2a_{23}Y,$$
$$A_{22} = a_{12} + a_{22} - 2a_{10}T - a_{21}Y, \qquad A_{23} = a_{20},$$

$$A_{31} = a_{27}, \qquad A_{32} = a_{26} + a_{25} - 2a_{24} - a_{21}T + 2a_{23}Y,$$
$$A_{33} = -a_{12} + 2a_{10}T + a_{21}Y,$$

$$A_{i+3,1} = D_tA_{i1} + 2(\lambda_{1Y} + 2T_{x_1})A_{i1} - \lambda_{0Y}A_{i2},$$
$$A_{i+3,2} = D_tA_{i2} - 2(\lambda_{1T} + Y_{x_1})A_{i1} + (\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 5T_{x_1})A_{i2} - -2\lambda_{0Y}A_{i3},$$
$$A_{i+3,3} = D_tA_{i3} - (\lambda_{1T} + Y_{x_1})A_{i2} + 2(\lambda_{0T} + 3T_{x_1})A_{i3},$$

$$A_{i+6,1} = D_{x_2}A_{i1} + 2(\lambda_{2Y} + 3Y_{x_1})A_{i1} - (\lambda_{1Y} + T_{x_1})A_{i2},$$
$$A_{i+6,2} = D_{x_2}A_{i2} - 2\lambda_{2T}A_{i1} + (\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 5Y_{x_1})A_{i2} - -2(\lambda_{1Y} + T_{x_1})A_{i3},$$
$$A_{i+6,3} = D_{x_2}A_{i3} - \lambda_{2T}A_{i2} + 2(\lambda_{1T} + 2Y_{x_1})A_{i3}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

где $D_t = \partial_t - T\partial_{x_1} + \lambda_0\partial_T + \lambda_1\partial_Y$, $D_{x_2} = \partial_{x_2} - Y\partial_{x_1} + \lambda_1\partial_T + \lambda_2\partial_Y$, и используются обозначения

$$\lambda_0 = -K_1 + 2L_1T - P_1T^2 + V_1T^3 + (-K_2 + 2M_2T - Q_2T^2)Y,$$

$$\lambda_1 = -M_1 + S_1T + (L_1 - L_2)Y - V_0T^2 + (S_2 - P_1)TY + +M_2Y^2 + V_1T^2Y - Q_2TY^2,$$

$$\lambda_2 = -Q_1 + (2S_1 - P_2)Y + (2S_2 - P_1)Y^2 - Q_2Y^3 + +(V_2 - 2V_0Y + V_1Y^2)T,$$

$$\Phi_1 = a_{13} - a_{11}T + (a_{16} - a_{15} - a_{14})Y - a_{20}T^2 + (a_{12} + a_{22})TY + \\ +(a_{26} - a_{25} - a_{24})Y^2 - a_{10}T^2Y - a_{21}TY^2 + a_{23}Y^3,$$

$$\Phi_2 = a_{17} + (a_{14} - 2a_{15})T + (a_{28} - a_{18})Y + a_{12}T^2 - a_{27}Y^2 + \\ +(a_{26} + a_{25} - 2a_{24})TY - a_{10}T^3 - a_{21}T^2Y + a_{23}TY^2,$$

$$\Phi_3 = D_t(\Phi_{1TY} + \Phi_{2TT}) + D_{x_2}(\Phi_{1YY} + \Phi_{2TY}) + D(\Phi_{1Y} + \Phi_{2T}),$$

$$\Phi_4 = \lambda_{2T}\Phi_{2YY} + (2T_{x_1} + \lambda_{1Y})\Phi_{2TT} - (2Y_{x_1} + \lambda_{1T})\Phi_{1YY} - \\ -\lambda_{0Y}\Phi_{1TT} - D_t\Phi_{1TY} + D_{x_2}\Phi_{2TY} + D(\Phi_{2T} - \Phi_{1Y}),$$

$$\Phi_5 = (2Y_{x_1} + \lambda_{2Y} - \lambda_{1T})\Phi_{2TT} - 2\lambda_{2T}\Phi_{2TY} + 2(2Y_{x_1} + \lambda_{1T})\Phi_{1TY} + \\ +(2T_{x_1} + \lambda_{0T} - \lambda_{1Y})\Phi_{1TT} + D_t\Phi_{1TT} - D_{x_2}\Phi_{2TT} + 2D\Phi_{1T},$$

$$\Phi_6 = (2Y_{x_1} + \lambda_{2Y} - \lambda_{1T})\Phi_{2YY} - 2\lambda_{0Y}\Phi_{1TY} + 2(2T_{x_1} + \lambda_{1Y})\Phi_{2TY} + \\ +(2T_{x_1} + \lambda_{0T} - \lambda_{1Y})\Phi_{1YY} - D_t\Phi_{1YY} + D_{x_2}\Phi_{2YY} + 2D\Phi_{2Y},$$

при этом оператор $D = \partial_{x_1}$ действует на коэффициенты при степенях T, Y, но не на T, Y.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_1'' &= P_1(x)x_1'^2 + 2S_1(x)x_1'x_2' + Q_1(x)x_2'^2, \\ x_2'' &= P_2(x)x_2'^2 + 2S_2(x)x_1'x_2' + Q_2(x)x_1'^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Для нее все инварианты (5) обращаются в нуль, за исключением a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Инварианты второго порядка системы (6) равны

$$\begin{aligned} b_{j0} &= a_{j1,x_k} + Q_j(a_{12} + a_{22}) + 2P_k a_{j1}, \\ b_{j1} &= a_{j1,x_j} + S_j(a_{12} + a_{22}) + 2S_k a_{j1}, \\ b_{j2} &= a_{j2,x_k} + Q_j a_{k1} + (S_j + P_k)a_{j2} + S_k a_{j1}, \quad j = 1,2, \\ b_{j3} &= a_{k2,x_k} + Q_j a_{k1} + (S_j + P_k)a_{k2} + S_k a_{j1}, \quad k = 3 - j. \end{aligned}$$

Известно, что в любой системе (6) отделяется уравнение

$$x_j'' = Q_j + (2S_j - P_{3-j})x_j' + (P_j - 2S_{3-j})x_j'^2 - Q_{3-j}x_j'^3$$

относительно одной из функций x_j, $j = 1,2$, если в качестве независимой переменной $\bar{t}$ выбрать другую функцию x_{3-j}.

В системе (6) в результате преобразования (4) уравнение отделяется тогда и только тогда, когда ее относительные инварианты первого и второго порядка удовлетворяют условию

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{23} \\ a_{22} & a_{21} & b_{13} & b_{22} & b_{21} & b_{20} \end{Vmatrix} = 1.$$

Уравнения системы (6) полностью разделяются в результате преобразования вида (4) тогда и только тогда, когда $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$. В этом случае система (6) эквивалентна уравнениям $\bar{x}_1'' = 0$, $\bar{x}_2'' = 0$.

Система (6) приводится к виду (3) преобразованием (2) с $\theta_{x_j} \neq 0$, если при $j = 1$ или $j = 2$ выполнены условия $a_{j1} \neq 0$ и

$$J_1 = 0, \quad a_{j1}\, b_{3-j,2} - a_{3-j,2}\, b_{j1} = 0, \quad a_{j1}\, b_{j3} - a_{3-j,2}\, b_{j0} = 0.$$

Система (6) линеаризуется преобразованием (2) (но не к простейшему виду $\bar{x}_1'' = 0$, $\bar{x}_2'' = 0$) при условии

$$J_0 = 0, \quad J_1 = 0, \quad b_{j1} = b_{j2}, \quad a_{j1}\, b_{3-j,2} - a_{3-j,2}\, b_{j1} = 0, \quad j = 1,2.$$

Здесь $J_0 = a_{12} - a_{22}$, $J_1 = a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}$.

Уравнения геодезических в пространстве с метрикой, задаваемой симметрической матрицей $g_{ij}(x)$ ($\Delta = \det\|g_{ij}(x)\| \neq 0$),

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x_i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt} = 0, \\ &\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \quad i,j,k = 1,2, \end{aligned} \tag{7}$$

(здесь j'' означает дифференцирование по x_j) содержатся в семействе (6). Их ненулевые инварианты (5) совпадают с компонентами тензора кривизны и имеют вид

$$a_{11} \equiv R^1_{221} = g_{22}\,\rho(x), \qquad a_{12} \equiv R^1_{121} = g_{12}\,\rho(x),$$
$$a_{21} \equiv R^2_{112} = g_{11}\,\rho(x), \qquad a_{22} \equiv R^2_{212} = g_{12}\,\rho(x)$$

с функцией

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\Delta^{-1}[g_{11,22} + g_{22,11} - 2g_{12,12}] + \frac{1}{4}\Delta^{-2}[g_{12}(g_{11,2}g_{22,1} - g_{11,1}g_{22,2} + 2g_{12,1}g_{22,1} + 2g_{12,2}g_{11,2} - 4g_{12,1}g_{12,2}) + g_{11}(g_{22,2}(2g_{12,1} - g_{11,2}) - g^2_{22,1}) + g_{22}(g_{11,1}(2g_{12,2} - g_{22,1}) - g^2_{11,2})].$$

Случай $\rho = 0$ соответствует пространству, геодезические которого в подходящих координатах являются прямыми линиями. Если $\rho \neq 0$, то уравнения (7) относятся к системам (6) с $J_0 = 0$, $J_1 \neq 0$, для которых невозможны ни линеаризация, ни полное разделение уравнений системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов МК-8247.2010.1, РФФИ (проект 10-01-00186-а), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (госконтракт 02.740.11.0612) и гранта № 3 Республики Башкортостан для молодых ученых и молодежных научных коллективов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cantrijn F., Sarlet W., Vandecasteele A., Martinez E. *Complete separability of time-dependent second-order ordinary differential equations* // Acta Appl. Math. – 1996. – V. 42. – No 3. – P. 309-334.

2. Fels M. E. *The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations* // Proc. London Math. Soc. – 1995. – V. 71. – P. 221-240.

Ю. Ю. Багдерина, А. У. Сакиева
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
yulya@mail.rb.ru

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ЦЕПОЧЕК, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ДАРБУ

В работе рассматриваются полудискретные цепочки вида

$$\frac{d}{dx}u(n+1,x) = \frac{d}{dx}u(n,x) + f(u(n,x),u(n+1,x)), \quad n \in Z. \quad (1)$$

Используются обозначения $u_n = u(n,x)$, $u_{n+k} = u(n+k,x)$, D — оператор сдвига по n, т. е. $Dh(n,x) = h(n+1,x)$, и D_x — оператор полной производной по x, т. е. $D_xh(n,x) = (d/dx)h(n,x)$. Пусть функции I и F зависят от x и конечного числа переменных u_n, $u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$ и их производных по x.

Определение. *Функция* I *называется* n*-интегралом цепочки* (1), *если* $DI = I$. *Функция* F *называется* x*-интегралом цепочки* (1), *если* $D_xF = 0$.

Можно показать, что n-интеграл I является функцией переменных x, u_n и производных функции u_n по x, а x-интеграл F не зависит от производных по x переменных u_n, $u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$.